Generalizaciones

Aplicaciones matemáticas para economía y negocios (EAF2010)

Felipe Del Canto

Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer semestre de 2021

Método de Lagrange

Método de Lagrange (el caso de n variables)

- Partimos generalizando el método de Lagrange cuando f es multivariada.

- Mantenemos el supuesto que solo tenemos una restricción.

- Aquí la generalización solo implica que aparecen más CPO.

Teorema (Teorema de Lagrange)

Sean f y g dos funciones multivariadas con derivadas parciales continuas y sea $c \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g(\mathbf{x}) = c \end{aligned}$$

y que $\mathbf{x}^*$ no es un punto crítico de g. Entonces, existe un número λ^* tal que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ es un punto crítico de la función

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda\left[g(\mathbf{x}) - c\right]$$

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Un albañil debe ubicar una cuerda de acero desde una argolla del piso, en el punto $\left(4,4,\frac{1}{2}\right)$, para que se enganche en el paraboloide dado por la ecuación $z=x^2+y^2$. Su objetivo es usar la menor cantidad de cuerda posible. Su problema de optimización es:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x,y,z\in\mathbb{R}} & (x-4)^2+(y-4)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ \text{s.a.} & z=x^2+y^2 \end{array}$$

El método de Lagrange puede aplicarse directamente, aunque tengamos un problema de minimización. Sin embargo, para ser consistente con el teorema y porque será importante seguir las reglas para el capítulo 5 lo cambiaremos.

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

El problema escrito como maximización y con las restricción escrita "correctamente" es

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & -(x-4)^2-(y-4)^2-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{s.a.} \quad & z-x^2-y^2=0 \end{aligned}$$

con lagrangiano

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=-(x-4)^2-(y-4)^2-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\lambda\left[z-x^2-y^2\right]$$

Partimos notando que el gradiente de la restricción es $(-2x,-2y,1)$, que no se anula nunca, luego no hay puntos que violen la condición de calificación de restricción. Ahora revisamos las CPO.

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Si derivamos con respecto a cada variable obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2(x-4) + 2\lambda x = 0 \qquad \text{(CPO-}x\text{)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2(y-4) + 2\lambda y = 0 \qquad \text{(CPO-}y\text{)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -2\left(z - \frac{1}{2}\right) - \lambda = 0 \qquad \text{(CPO-}z\text{)}$$

Recordemos que la derivada con respecto a λ es la restricción, así que no tiene mucho sentido escribirla. Vamos a reescribir un poco estas ecuaciones para ver cómo resolver.

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Despejando y dividiendo por 2 las primeras dos CPO, obtenemos

$$x - 4 = \lambda x \tag{CPO-x}$$

$$y - 4 = \lambda y \tag{CPO-y}$$

$$1 - 2z = \lambda \tag{CPO-z}$$

Nos gustarían dividir por x en (CPO-x) y por y en (CPO-y) para despejar λ, pero tenemos que estar seguros de que $x^* \neq 0$. Si $x^* = 0$, entonces por (CPO-x) tendríamos $-4 = 0$, luego $x^* \neq 0$. De la misma forma $y^* = 0$. Así, dividiendo por x en (CPO-x) y por y en (CPO-y) tenemos

$$\frac{x-4}{x} = \lambda = \frac{y-4}{y}$$

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Luego

$$\frac{x-4}{x} = \frac{y-4}{y} \Rightarrow xy - 4y = xy - 4x \Rightarrow x = y$$

Luego, de la restricción, $z = 2x^2$ y juntando eso con (CPO-z) obtenemos $\lambda = 1 - 4x^2$ y podemos juntar esto con (CPO-x)

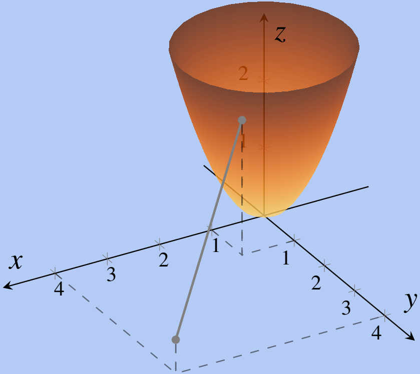
$$x - 4 = \lambda x = (1 - 4x^2)x = x - 4x^3$$

De aquí, $x^3 = 1$, luego $x^* = 1$ y por las relaciones anteriores $y^* = 1$, $z^* = 2$ y $\lambda^* = -3$.

Siendo este el único candidato, debe ser la solución (ya veremos condiciones de suficiencia global en un par de diapositivas). ¿La razón? El problema de maximización (el original es de minimización) no tiene solución (¿por qué?).

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Gráficamente, la solución se ve así, donde los puntos factibles son los que están en el paraboloide



Método de Lagrange (el caso de m restricciones)

- Continuamos el camino con el caso de m restricciones (y n variables).

- Ahora, la condición de calificación es un poco más compleja de testear.

- Pero la lógica sigue siendo la misma.

Método de Lagrange (el caso de m restricciones)

- Pensemos que funciones $g_1, \ldots, g_m$ son las restricciones del problema.

- Vamos a llamar matriz Jacobiana de $g_1, \ldots, g_m$ a la matriz:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Método de Lagrange (el caso de m restricciones)

Teorema (Teorema de Lagrange)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Supongamos que $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es la solución del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ & \vdots \\ & g_m(\mathbf{x}) = c_m \end{aligned}$$

y que $J(\mathbf{x}^*)$ tiene rango (fila) m. Entonces, existen números $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ tales que $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ es un punto crítico de

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[g_j(\mathbf{x}) - c_j \right]$$

Método de Lagrange (el caso de m restricciones)

- Notar que en este caso aparece un multiplicador por cada restricción.

- Que J tenga rango fila m significa que sus vectores fila son LI.
  - En general, el rango fila es el mayor número de vectores fila que son LI.
  - Recordar además que los vectores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son LI si la ecuación:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

    con incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tiene como solución única

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$$

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

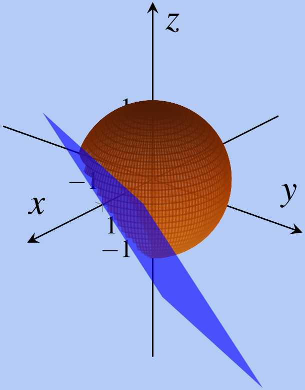
A una persona se le ofrece jugar un juego. En este juego la persona ingresa a una esfera de radio 1, la cual está atravesada por una pared (un plano) de ecuación $x - y - z = 1$. La persona debe escoger un punto (x, y, z) de la intersección entre la pared y la esfera. Si la suma de las coordenadas es positiva, la persona gana ese monto y si es negativa debe pagar ese monto al dueño del juego. ¿Cuánto es lo máximo que la persona estaría dispuesta a pagar por entrar al juego?

El problema de optimización es el siguiente

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z \in \mathbb{R}} \quad & x + y + z \\ \text{s.a.} \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ & x - y - z = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Graficamente tenemos esto



Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Volvamos al problema:

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & x+y+z \\ \text{s.a.} \quad & x^2+y^2+z^2=1 \\ & x-y-z=1 \end{aligned}$$

Solo por completitud, notar que

$$J(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Los vectores filas de $J(x,y,z)$ no son LI cuando uno de ellos es 0 o uno es múltiplo del otro.

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Lo primero solo ocurre en el punto $(0,0,0)$, que no satisface ninguna restricción. Lo segundo solo ocurre si $x=-y$ y $x=-z$. Reemplazando esto en las restricciones obtenemos que $3x^2=1$ y $3x=1$, lo que es imposible. Concluimos que no hay puntos que no satisfagan la condición de calificación de restricción y que además verifiquen ambas restricciones.

Ahora procedemos a escribir el lagrangiano

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda)=x+y+z-\lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)-\lambda_2(x-y-z-1)$$

Recordar que ahora hay dos multiplicadores porque hay uno por cada una de las restricciones.Ahora procedemos a encontrar los puntos críticos de $\mathcal{L}$ (no miraremos las CPO de λ_1 y λ_2 porque sabemos que son las restricciones)

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Tenemos

$$1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \tag{CPO-x}$$

$$1 - 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0 \tag{CPO-y}$$

$$1 - 2\lambda_1 z + \lambda_2 = 0 \tag{CPO-z}$$

Si restamos (CPO-y) con (CPO-z) obtenemos

$$2\lambda_1(z - y) = 0 \tag{$*$}$$

Pero si sumamos (CPO-x) y (CPO-y) obtenemos

$$2 - 2\lambda_1(x + y) = 0 \Rightarrow \lambda_1(x + y) = 1$$

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

La ecuación anterior anterior dice que $\lambda_1 \neq 0$, luego de $(*)$ tenemos $y = z$. Ahora que redujimos el problema a 2 variables (x e y), podemos usar las restricciones reemplazando $z = y$

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 1 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Reemplazando $x = 1 + 2y$ en la primera restricción tenemos

$$(1+2y)^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow 1 + 4y + 6y^2 = 1 \Rightarrow 2y(2+3y) = 0$$

De donde $y = 0$ ó $y = -\frac{2}{3}$. En el primer caso $z = y = 0$ y $x = 1 + 2y = 1$. Además

$$\lambda_1 = \frac{1}{x+y} = 1, \qquad \lambda_2 = 1 - 2\lambda_1 x = -1$$

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

En el segundo caso $z = y = -\frac{2}{3}$, $x = 1 + 2y = -\frac{1}{3}$. Además

$$\lambda_1 = \frac{1}{x+y} = -1, \qquad \lambda_2 = 1 - 2\lambda_1 x = \frac{1}{3}$$

Estos son los dos candidatos. Notemos que para el primer punto $x + y + z = 1$ y para el segundo $x + y + z = -\frac{5}{3}$, luego el primero es el óptimo buscado, es decir, la persona puede ganar a lo más 1 y por lo tanto eso es lo máximo que estaría dispuesto a pagar por entrar.

Ejercicio (Teorema de Lagrange)

Suponga que ahora el juego cambia. La persona entra a un “zeppelin” de ecuación $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, con una pared de ecuación $x + y + z = 1$. Más aún, el premio ya no es la suma de las 3 coordenadas, sino que solo de las primeras dos (x e y). ¿Cuánto es lo máximo que la persona está dispuesta a pagar? ¿Cuánto debe pagar como máximo en el caso que pierda?

Método de Lagrange (el caso de m restricciones)

- Ahora generalizaremos en un paso las condiciones de suficiencia.
  - Tanto locales como globales.

- Por simplicidad, vamos a abreviar la forma de escribir el problema:

$$
\begin{aligned}
\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\
& \quad \vdots \\
& g_m(\mathbf{x}) = c_m
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\
\text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall j \in \{1,\ldots,m\}
\end{aligned}
$$

Condiciones suficientes de segundo orden

Teorema (Condiciones de suficiencia global)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos los problemas

$$\begin{array}{cl} \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{cl} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{array}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$. Definamos la función lagrangiana con λ_j^* fijado para todo j

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* \left[g_j(\mathbf{x}) - c_j\right]$$

Entonces:

- Si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es cóncava, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema de maximización.
- Si $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x})$ es convexa, $\mathbf{x}^*$ es solución del problema de minimización.

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

En el ejemplo de la cuerda de acero, el problema transformado era

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & -(x-4)^2-(y-4)^2-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{s.a.} \quad & z-x^2-y^2=0 \end{aligned}$$

Y el único candidato que teníamos era $x^*=y^*=1$, $z^*=2$ y $\lambda^*=-3$. La función objetivo es estrictamente cóncava, pues su matriz Hessiana es

$$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

que tiene menores principales dominantes $D_1=-2$, $D_2=4$ y $D_3=-8$.

Ejemplo (Teorema de Lagrange)

Además, la restricción $g(x,y,z) = z - x^2 - y^2$ es cóncava porque

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene menores principales (no dominantes) de orden 1: -2, -2 y 0; de orden 2: 4, 0 y 0; y de orden 3 igual a 0.

Así, f es (estrictamente) cóncava, $\lambda^* g$ es convexa y, por lo tanto, $\tilde{\mathcal{L}}$ es cóncava, mostrando que el candidato resuelve el problema de maximización y, por lo tanto, el problema original de minimización.

Ejercicio (Condiciones de suficiencia global)

Verifique las condiciones de suficiencia para el ejemplo del juego. Compruebe que el punto que dijimos que era el óptimo en verdad lo es según el teorema de suficiencia. Compruebe que el otro punto no las cumple para el problema de maximización (pero que sí los cumple para el de minimización).

Ejercicio (Condiciones de suficiencia global)

Verifique las condiciones de suficiencia para el ejercicio del juego modificado. Compruebe qué candidatos son soluciones al problema de minimización y cuáles al de maximización.

- Para las condiciones de suficiencia local necesitamos generalizar la matriz $\tilde{H}$.

- Para el caso general la matriz es un poco más compleja:

$$\tilde{H}(\mathbf{x},\lambda_1,\dots,\lambda_m) = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & \cdots & 0 & \nabla g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \nabla g_m(\mathbf{x}) \\ \hdashline \nabla g_1^T(\mathbf{x}) & \cdots & \nabla g_m^T(\mathbf{x}) & H_{\mathcal{L}}(\mathbf{x},\lambda_1,\dots,\lambda_m) \end{array}\right)$$

- Notar que esta matriz tiene $n+m$ filas y $n+m$ columnas

Teorema (Condiciones de suficiencia local)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones con derivadas parciales continuas y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{array}$$

con candidato $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$. Considere $\tilde{H}^*$ la matriz $\tilde{H}$ evaluada en el candidato. Entonces,

- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n-m$ menores principales dominantes alternan signo, y el último tiene el signo de $(-1)^n$, $\mathbf{x}^*$ es máximo local entre los puntos que cumplen las restricciones.
- Si para $\tilde{H}^*$ los últimos $n-m$ menores principales dominantes tienen el mismo signo de $(-1)^m$, $\mathbf{x}^*$ es un mínimo local entre los puntos que cumplen las restricciones.

Ejercicio (Condiciones de suficiencia local)

Verifique las condiciones de suficiencia local en los ejemplos y ejercicios anteriores.

Interpretación económica de los multiplicadores

Interpretación económica de los multiplicadores

- Antes, dijimos que el multiplicador era el **precio sombra** de la restricción.

- Cuando hay varias restricciones tendremos la misma interpretación.
  - Cada multiplicador corresponderá al precio sombra de su restricción.

- Y cada multiplicador responderá a la pregunta:

  "¿Cuánto estoy dispuesto a pagar como máximo
  para aumentar la restricción j en 1 unidad?"

Interpretación económica de los multiplicadores

Teorema (Interpretación económica de los multiplicadores)

Sean $f, g_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones y sean $c_1, \ldots, c_m$ números reales. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_j(\mathbf{x}) = c_j \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

con solución $(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ que dependen de $c_1, \ldots, c_m$ (es decir, son funciones de m variables). Si $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivada continua para cada j y además se cumple la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\lambda_j^*(c_1, \ldots, c_m) = \frac{\partial}{\partial c_j} f(\mathbf{x}^*(c_1, \ldots, c_m))$$

Ejemplo (Interpretación económica de los multiplicadores)

Pensemos en el ejemplo del juego, pero dejando el tamaño de la esfera y la posición de la pared libres

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & x+y+z \\ \text{s.a.} \quad & x^2+y^2+z^2=r \\ & x-y-z=p \end{aligned}$$

Ahora el problema depende de 2 parámetros r y p. El lagrangiano ahora es

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda;r,p) = x+y+z-\lambda_1[x^2+y^2+z^2-r]+\lambda_2(x-y-z-p)$$

Ejemplo (Interpretación económica de los multiplicadores)

Según el teorema anterior, el cambio en el premio máximo cuando cambian los parámetros es

$$\frac{\partial}{\partial r} f^*(r,p) = \lambda_1^*(r,p)$$
$$\frac{\partial}{\partial p} f^*(r,p) = \lambda_2^*(r,p)$$

En nuestro ejemplo con $r = p = 1$, teníamos $x^* = 1$, $y^* = z^* = 1$, $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = -1$ y así

$$\frac{\partial}{\partial r} f^*(1,1) = 1$$
$$\frac{\partial}{\partial p} f^*(1,1) = -1$$

Ejemplo (Interpretación económica de los multiplicadores)

Este resultado dice que si r aumenta, la persona gana. Geométricamente tiene sentido. La esfera se agranda y por lo tanto las opciones de coordenadas válidas aumenta. Dicho de otra manera, la persona estaría dispuesta a pagar como máximo \$1 para que r **aumente**.

Un análisis similar se puede hacer con p. Cuando p aumenta, geométricamente la pared se acerca más al borde de la esfera y por lo tanto las opciones se achican, por lo que la persona pierde. Dicho de otra manera, la persona estaría dispuesta a pagar como máximo \$1 para que p **disminuya**.

Ejercicio (Interpretación económica de los multiplicadores)

Repita este análisis para el juego modificado.

Teorema de la envolvente

- Este teorema decía que el efecto de los parámetros se revisa en el lagrangiano.
- Más aún, decía que podríamos ignorar el efecto del parámetro en la solución.
  - Solo nos importan como cambian la función objetivo y las restricciones.
- Esto seguirá siendo así en este contexto general.
  - Pero partiremos manteniendo un solo parámetro.

Teorema (Teorema de la envolvente)

Sean $f, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones que dependen de un parámetro a. Sean $\mathbf{x}^*(a)$, $\lambda_j^*(a)$ (con $j = 1, \ldots, m$) la solución óptima del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}; a) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(\mathbf{x}; a) = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

que tiene lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m; a)$ y función de valor $f^*(a)$. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivada continua (como funciones del parámetro a) para todo j y que se satisface la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\frac{d}{da} f^*(a) = \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(a), \lambda_1^*(a), \ldots, \lambda_m^*(a); a)$$

- Muchas veces los problemas pueden depender de más de un parámetro.
  - Un precio, el presupuesto y los costos de los factores.
- El teorema anterior se generaliza para el caso donde a es un vector.
- Para eso, damos de manera explícita la definición general de función de valor.

Función de valor

Definición (Función de valor)

Sean $f, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones que dependen de un vector de parámetros $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$. Supongamos que el problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

está bien definido y tiene solución óptima $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$. Llamamos **función de valor** del problema asociado a la función

$$f^*(\mathbf{a}) = f(x^*(\mathbf{a}); \mathbf{a})$$

¡Recordar que la función de valor no es más que el valor de f en el punto óptimo!

Teorema (Teorema de la envolvente)

Sean $f, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $j = 1, \ldots, m$ funciones que dependen de un vector de parámetros $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$. Sean $\mathbf{x}^*(\mathbf{a})$, $\lambda_j^*(\mathbf{a})$ (con $j = 1, \ldots, m$) la solución óptima del problema

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \quad & f(\mathbf{x}; \mathbf{a}) \\ \text{s.a.} \quad & h_j(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

que tiene lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m; \mathbf{a})$ y función de valor $f^*(\mathbf{a})$. Supongamos que $\mathbf{x}^*$ y λ_j^* son funciones con derivadas parciales continuas con respecto a a_i para todo j y que se satisface la condición de calificación de restricciones en la solución óptima. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial a_i} f^*(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial a_i} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*(\mathbf{a}), \lambda_1^*(\mathbf{a}), \ldots, \lambda_m^*(\mathbf{a}); \mathbf{a})$$

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

Pensemos en el ejemplo del juego, pero con la siguiente modificación en la forma de la "esfera"

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & x+y+z \\ \text{s.a.} \quad & ax^2+by^2+cz^2=1 \\ & x-y-z=1 \end{aligned}$$

que depende de 3 parámetros a, b y c. El lagrangiano ahora es

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda;a,b,c)=x+y+z-\lambda_1[ax^2+by^2+cz^2-1]+\lambda_2(x-y-z-1)$$

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

Según el teorema de la envolvente, el cambio en el premio máximo cuando cambian los parámetros es

$$\frac{\partial}{\partial a} f^*(a,b,c) = -\lambda_1^*(a,b,c)(x^*(a,b,c))^2$$
$$\frac{\partial}{\partial b} f^*(a,b,c) = -\lambda_1^*(a,b,c)(y^*(a,b,c))^2$$
$$\frac{\partial}{\partial c} f^*(a,b,c) = -\lambda_1^*(a,b,c)(z^*(a,b,c))^2$$

En nuestro ejemplo con $a = b = c = 1$, teníamos $x^* = 1$, $y^* = z^* = 0$, $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = -1$ y así

$$\frac{\partial}{\partial a} f^*(1,1,1) = -1, \qquad \frac{\partial}{\partial b} f^*(1,1,1) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial c} f^*(1,1,1) = 0$$

Ejemplo (Teorema de la envolvente)

Este resultado dice que si a aumenta, la persona pierde. Geométricamente ocurre que pierde posibilidades en el eje x (la esfera se aplana en la dirección del eje x), pero esto no ocurre de la misma forma si b o c aumentan. Geométricamente, la pérdida de opciones en el eje y ó z no afectan las posibilidades de la persona.

Dicho de otra manera, la persona estaría dispuesta a pagar como máximo $2 para que a **disminuya**, pero no debería estar dispuesta a pagar (o que le paguen) para que b ó c cambien.

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Repita el mismo análisis anterior para el ejemplo de la cuerda de acero cuando la forma del paraboloide es libre:

$$\begin{aligned} \min_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & (x-4)^2 + (y-4)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \text{s.a.} \quad & z = ax^2 + by^2 \end{aligned}$$

Ejercicio (Teorema de la envolvente)

Repita el mismo análisis anterior para el ejercicio del juego modificado:

$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & Ax + By + Cz \\ \text{s.a.} \quad & ax^2 + by^2 + cz^2 = r \\ & x - y - z = p \end{aligned}$$

(Ayuda: Observe que hay 8 parámetros para estudiar.)